Interrogation n°4 — Corrigé (sujet A)

1) Calculer l'intégrale $\quad I := \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)^2+4}dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{4}(x+1)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\left[2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \arctan 0\right) \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

2) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Cf cours.

3) Donner les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^{7/3}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ces primitives sont les fonctions (définies sur $\mathbb{R}_+^*$) $x \mapsto -\dfrac{3}{4}x^{-\frac{4}{3}} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

4) Calculer l'intégrale $\quad I := \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx$. On pourra faire le changement de variables $x = \tan u$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan u(1+\tan^2 u)}{(1+\tan^2 u)^{\frac{3}{2}}}du \qquad \begin{cases} x = \tan u \\ dx = (1+\tan^2 u)\,du \end{cases} \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan u}{(1+\tan^2 u)^{\frac{1}{2}}}du \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan u}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{\frac{1}{2}}}du \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan u \cos u\, du \qquad (\text{car } \cos u > 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{3}\right]) \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin u\, du \\
&= [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

1) Donner les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ces primitives sont les fonctions (définies sur $\mathbb{R}^*$) $\quad x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x^{-2} + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-2} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) Calculer l'intégrale $\quad I := \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 3x} dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{x^2+3x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x(x+3)} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} [\ln |x|]_1^2 - \frac{1}{3} [\ln |x+3|]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} (\ln 5 - \ln 4) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 5 \end{aligned}$$

3) Calculer l'intégrale $\quad I := \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 dx$. On pourra faire le changement de variables $x = \sin u$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 dx \qquad \begin{cases} x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \end{cases} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin u \left(\sqrt{1 - \sin^2 u} \right)^3 \cos u \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin u \left(\sqrt{\cos^2 u} \right)^3 \cos u \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin u \cos^4 u \, du \\ &= \left[-\frac{1}{5} \cos^5 u \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{1}{5} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 - 1^5 \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 \end{aligned}$$

4) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Cf cours.